

Ćwiczenia XI

1. Pewna sieć kolejek, składająca się z pięciu węzłów typu M/M/1, opisana jest przez wektor strumieni zgłoszeń zewnętrznych :

$$\Lambda = [0 \ 0 \ A \ 0 \ B],$$

oraz macierz routingu między węzłami :

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{72} & \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix}.$$

Proszę obliczyć sumaryczne intensywności zgłoszeń wchodzących do wszystkich węzłów. Następnie, proszę obliczyć średnie opóźnienie tranzytowe zgłoszeń (czyli średni czas przebywania w sieci), przyjmując :

$$A = B = \frac{1}{s},$$
$$\mu_n = 2 \cdot \frac{n}{s}.$$

Rozwiązania :

$$\lambda_1 = \frac{7}{8}A + \frac{31}{36}B, \quad \lambda_2 = \frac{9}{8}A + \frac{5}{4}B, \quad \lambda_3 = 2A + \frac{10}{9}B,$$
$$\lambda_4 = \frac{2}{5}A + \frac{1}{3}B, \quad \lambda_5 = \frac{9}{5}A + 2B.$$

$$W \approx 4.9 \text{ s}$$

2. Projekt sieci czterowęzłowej przewiduje, że routing między węzłami będzie zgodny z poniższą tabelą :

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Całkowity strumień zgłoszeń dochodzący do tej sieci ma mieć intensywność X i dzielić się na dwa strumienie (Λ_1 i Λ_2) wpływające odpowiednio do węzłów 1 i 2 ($\Lambda_1 + \Lambda_2 = X$). We wszystkich czterech węzłach sieci mają znajdować się identyczne serwery o pojedynczych stanowiskach i tej samej intensywności obsługi.

Projektant sieci (czyli czytelniczka/czytelnik tego zadania) może zdecydować jak zostanie podzielony zewnętrzny strumień zgłoszeń X – tzn. jaka jego część wpłynie do węzła 1 (w postaci strumienia Λ_1), a jaka część do węzła 2 (w postaci strumienia Λ_2). Należy podjąć tą decyzję w taki sposób, aby wymagania co do szybkości serwerów obsługujących ruch w węzłach były jak najmniejsze.

(Rozwiązanie na następnej stronie)



Rozwiązanie :

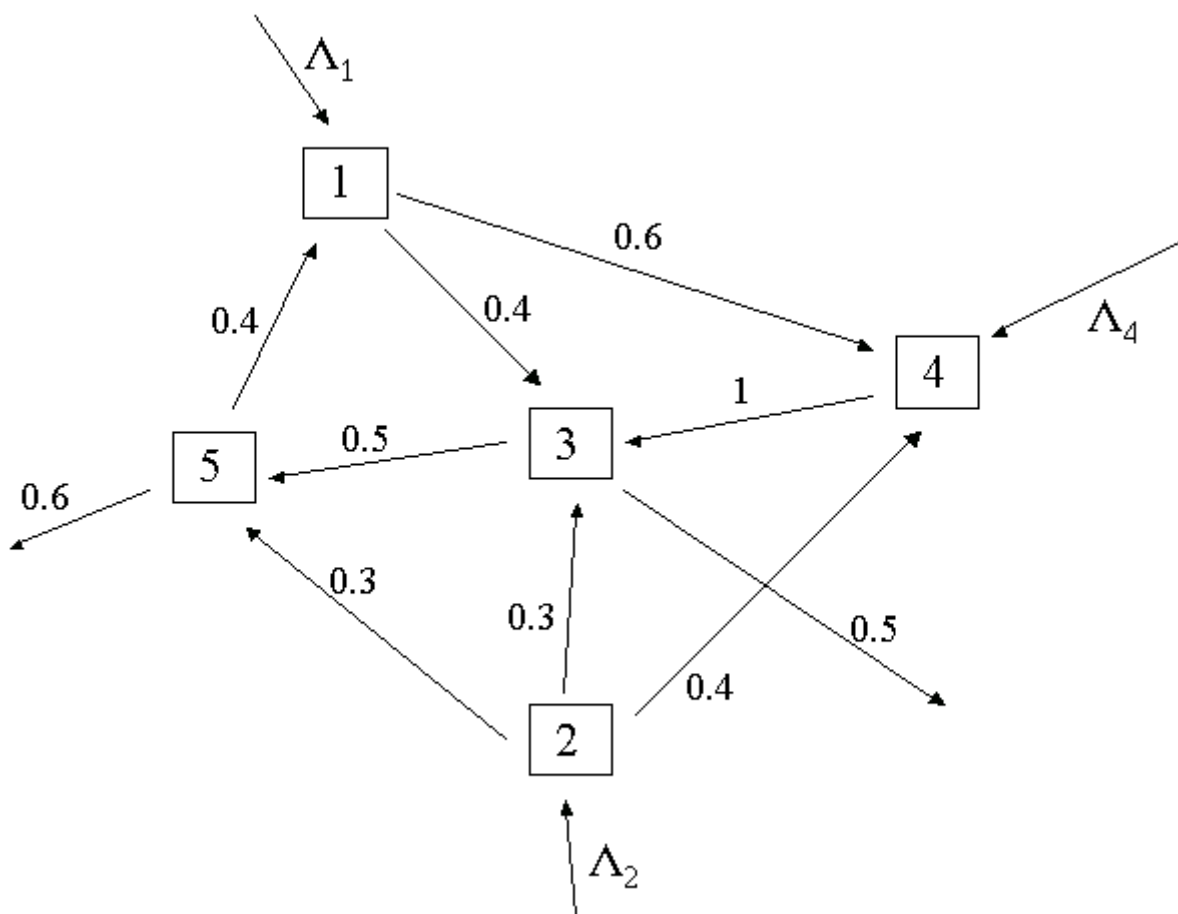
$$\lambda_1 \approx 1.19 \cdot \Lambda_1 + 0.38 \cdot \Lambda_2, \quad \lambda_2 \approx 0.6 \cdot \Lambda_1 + 1.19 \cdot \Lambda_2,$$

$$\lambda_3 \approx 0.71 \cdot \Lambda_1 + 0.43 \cdot \Lambda_2, \quad \lambda_4 \approx 0.48 \cdot \Lambda_1 + 0.95 \cdot \Lambda_2.$$

Problem postawiony w tym zadaniu sprowadza się do takiego podziału strumienia X , aby intensywność zgłoszeń wchodzących do najbardziej obciążonego węzła była jak najmniejsza. Widać, że niezależnie od podziału strumienia zgłoszeń X , najbardziej obciążony będzie węzeł 1 lub 2. Należy więc tak podzielić strumień X , aby $\lambda_1 = \lambda_2$. A to oznacza, że :

$$\Lambda_1 \approx 0.58 \cdot X, \quad \Lambda_2 \approx 0.42 \cdot X.$$

3. Dla sieci kolejek opisanej poniższym grafem, proszę policzyć intensywności zgłoszeń dochodzących do każdego z węzłów.



Rozwiązania :

$$\lambda_1 = 1.25 \cdot \Lambda_1 + 0.325 \cdot \Lambda_2 + 0.25 \cdot \Lambda_4,$$

$$\lambda_2 = \Lambda_2,$$

$$\lambda_3 = 1.25 \cdot \Lambda_1 + 1.025 \cdot \Lambda_2 + 1.25 \cdot \Lambda_4,$$

$$\lambda_4 = 0.75 \cdot \Lambda_1 + 0.595 \cdot \Lambda_2 + 1.15 \cdot \Lambda_4,$$

$$\lambda_5 = 0.625 \cdot \Lambda_1 + 0.8125 \cdot \Lambda_2 + 0.625 \cdot \Lambda_4.$$



4. Do którego węzła należy podłączyć zewnętrzny strumień zgłoszeń $X = 10$ zgłoszeń/s, aby średnie obciążenie węzłów (średnie intensywności zgłoszeń w węzłach) było jak najmniejsze? Dla takiego przypadku, proszę też obliczyć średni czas przebywania zgłoszenia w sieci. Proszę założyć, że w każdym węzle znajduje się serwer M/M/2, pojedyncze stanowisko obsługi zgłoszenie w średnim czasie 0.1 s.

Rozwiązania :

- przy podłączeniu do węzła 1 :

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} \approx 9.2 \text{ zgłoszeń/s,}$$

- dla węzła 2 :

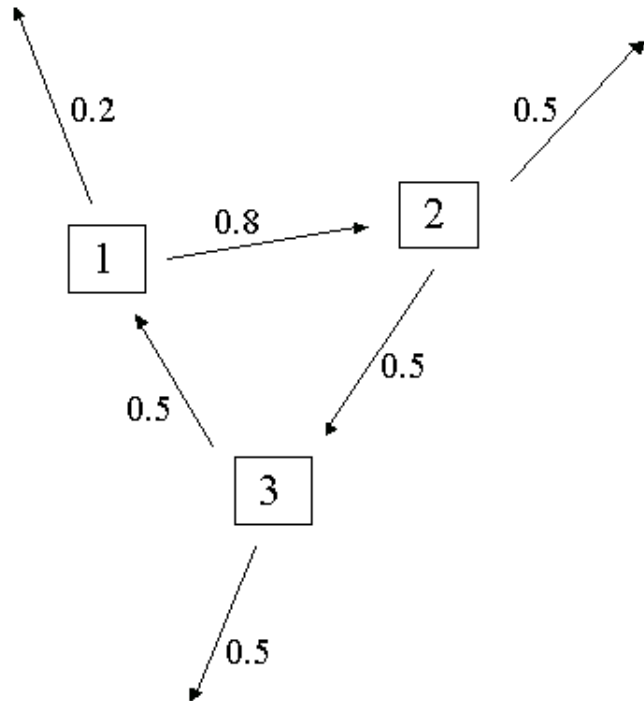
$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} \approx 7.3 \text{ zgłoszeń/s,}$$

- dla węzła 3 :

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} \approx 7.9 \text{ zgłoszeń/s.}$$

Optymalny jest węzeł drugi :

W tym przypadku : $W \approx 0.306$ s.

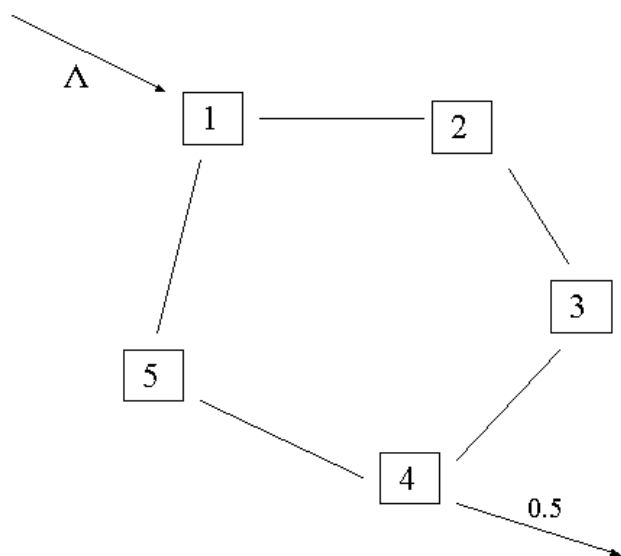


5. Pięć węzłów tworzy sieć pierścieniową (schemat na poniższym rysunku). Zgłoszenia zewnętrzne wpływają do sieci przez węzeł nr 1. Z węzła nr 4, 50 % ruchu kierowane jest z powrotem na zewnątrz sieci. Pozostałe węzły tylko przekazują zgłoszenia dalej. W którym kierunku należy puścić ruch w tym pierścieniu, aby średnia intensywność zgłoszeń w węzłach była możliwie mała ?

Rozwiązania :

Korzystniejszy jest kierunek przeciwny do wskazówek zegara. Wówczas średnia intensywność zgłoszeń w węzłach wynosi 1.6Λ ($\lambda_1 = 2\Lambda$, $\lambda_2 = \Lambda$, $\lambda_3 = \Lambda$, $\lambda_4 = 2\Lambda$, $\lambda_5 = 2\Lambda$).

Dla kierunku zgodnego ze wskazówkami zegara jest ona równa 1.8Λ .



6. Połączenia w sieci złożonej z czterech węzłów M/M/1 opisane są poniższą tabelą rutingu:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & X & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zgłoszenia dopływają do sieci jedynie przez węzeł nr 1 – intensywność tego strumienia zgłoszeń jest równa 10 zgłoszeń na minutę. Średni czas obsługi zgłoszenia w węzle wynosi odpowiednio:

- dla węzła nr 1 – 3 sekundy
- dla węzła nr 2 – 7.5 sekundy
- dla węzła nr 3 – 4 sekundy
- dla węzła nr 4 – 10 sekund

Proszę obliczyć, jakie wartości może przyjmować parametr X tak, aby sieć była stabilna.

Odpowiedź: $X \in \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}\right)$.

7. Pewna sieć kolejek składa się z ośmiu węzłów M/M/1. Ruting między węzłami dany jest poniższą tabelą.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do sieci dopływają dwa strumienie ruchu:

- do węzła nr 2: 50 zgłoszeń na sekundę,
- do węzła nr 8: 100 zgłoszeń na sekundę.

W sieci znajduje się 7 nowoczesnych węzłów (węzły nr 1, 2, 4, 5, 6, 7 i 8), w których obsługa pojedynczego zgłoszenia trwa średnio 0.1 mikrosekundy. Węzeł nr 3 jest przestarzały: intensywność obsługi zgłoszeń w tym węzle wynosi 90 zgłoszeń na sekundę.

Proszę policzyć średnie opóźnienie tranzytowe zgłoszenia przechodzącego przez tą sieć.

Odpowiedź: $W = 0.06$ sekundy.