Ćwiczenia VI

Uwagi do zadań 1-5 :
W każdym z zadań proszę :
A. narysować graf przejść i macierz intensywności,
B. podać graniczną intensywność zgłoszeń λ_{gr}, dla której system jest już niestabilny,
C. obliczyć prawdopodobieństwa wszystkich stanów Π_n,
D. obliczyć prawdopodobieństwo blokady (odrzucenia przychodzącego zgłoszenia) P_B,
E. obliczyć średnią wartość :

- intensywności zgłoszeń przyjmowanych przez system λ_+ i intensywności obsługi μ_+,
- długości kolejki L (sumy zgłoszeń obsługiwanych i czekających),
- czasu przebywania zgłoszenia w systemie W,
- liczby jednocześnie pracujących stanowisk obsługi N,
- procenta czasu, w którym system jest wolny P_{idle}.

1. Do salonu tatuaży w sezonie wakacyjnym przychodzi średnio 4 klientów na godzinę. Każdy pracownik salonu - mistrz i jego pomocnik – wykonuje pojedynczy tatuaż średnio w ciągu 30 minut. Klienci są dość niecierpliwi – gdy widzą, że w kolejce czekają już dwie osoby – rezygnują.

Rozwiązania :

λ_{gr} nie istnieje, system jest zawsze stabilny,

Istnieje tylko 5 stanów systemu : $\Pi_0 = \frac{1}{9}$, dla n = 1, 2, 3, 4 : $\Pi_n = \frac{2}{9}$,

$P_B = \frac{2}{9}$,

$\lambda_+ = \mu_+ = 3\frac{1}{9}$ osób na godzinę,

$L = 2\frac{2}{9}$ osoby,

$W = \frac{5}{7}$ godziny,

$N = 1\frac{5}{9}$,

$P_{idle} = \frac{1}{9} \cdot 100\,\% \approx 11\,\%$.

↓

2. Proszę rozważyć zespół 4 komputerów – serwera i trzech klientów. Każdy klient wysyła porcję danych do serwera. Serwer przetwarza te dane średnio przez 1 minutę, a wyniki odsyła do klienta. Na tej podstawie, klient dokonuje pewnych obliczeń, trwających średnio 3 minuty i znowu wysyła dane do serwera, itd. Serwer jednocześnie obsługuje wszystkich trzech klientów, więc czasem pewne dane czekają u niego w buforze.

Rozwiązania :

λ_{gr} nie istnieje, system jest zawsze stabilny,

Istnieją tylko 4 stany systemu : $\Pi_0 = \frac{9}{26}$, $\Pi_1 = \frac{9}{26}$, $\Pi_2 = \frac{6}{26}$, $\Pi_3 = \frac{2}{26}$,

$P_B = 0$,

$\lambda_+ = \mu_+ = 39\frac{3}{13}$ zgłoszeń na godzinę,

$L = 1\frac{1}{26}$,

$W = \frac{9}{340}$ godziny ≈ 95 sekund,

$N = \frac{17}{26}$,

$P_{idle} = \frac{9}{26} \cdot 100\,\% \approx 35\,\%$.

3. Pani Ania pracuje w informacji na dworcu PKS. Do jej okienka podchodzi średnio 240 osób na godzinę. Pani Ania każdemu podróżnemu poświęca średnio 30 sekund. Natomiast gdy kolejka czekających się wydłuża, gdy łącznie z obsługiwaną osobą jest ich co najmniej 10, pani Ania przyśpiesza, zaczyna wyrzucać z siebie informacje w ekspresowym tempie. Dzięki temu pojedynczy klient odchodzi średnio po 10 sekundach. Ponowny widok krótkiej kolejki działa na panią Anię uspokajająco – podróżni znów mają szansę usłyszeć długie, klarowne, 30-sekundowe wyjaśnienia.

Rozwiązania :

$\lambda_{gr} = 360$ osób na godzinę,

dla n < 10 : $\Pi_n = \frac{2^n}{2047}$, dla n > 9 : $\Pi_n = \frac{2^n}{2047 \cdot 3^{n-9}}$,

$P_B = 0$,

$\lambda_+ = \mu_+ = 240$ osób na godzinę,

$L = \frac{20482}{2047}$ (około 10 osób),

$W \approx 2\frac{1}{2}$ minuty,

$N = \frac{2046}{2047}$,

$P_{idle} = \frac{1}{2047} \cdot 100\,\% \approx 0.05\,\%$.

↓

4. Spacer cara po Petersburskim porcie zakłócają mewy śmieszki. Wredne ptaszyska siadają gdzie się tylko da i wyraźnie naśmiewają się z władcy Rosji. Na szczęście marszałek wojsk rosyjskich przewidział tą kłopotliwą sytuację. Cała podległa mu armia czuwa nad spokojem swego władcy. Gdy tylko jakaś mewa usiądzie w zasięgu wzroku cara, natychmiast zjawia się tam jeden z dzielnych żołnierzy i przepędza ją jak najdalej. Mewy pojawiają się średnio raz na 5 sekund, a przepędzanie każdego z tych upartych ptaków trwa średnio 15 sekund ...
Za n-ty stan systemu należy uważać sytuację, gdy n żołnierzy jednocześnie walczy z mewami.

Rozwiązania :

λ_{gr} nie istnieje, system jest zawsze stabilny – zakładamy, że zasoby ludzkie armii rosyjskiej są nieograniczone.

$\Pi_n = \frac{3^n}{n!} \cdot e^{-3}$,

$P_B = 0$,

$\lambda_+ = \mu_+ = 12$ zgłoszeń na minutę,

L = 3,

W = 15 sekund,

N = 3,

$P_{idle} = e^{-3} \cdot 100\,\% \approx 5\,\%$.

5. Do serwera o dwóch stanowiskach obsługi przychodzi średnio 20 zgłoszeń na sekundę. Każde stanowisko obsługuje pojedyncze zgłoszenie średnio w czasie 0.1 sekundy. Aby uniknąć przepełnienia bufora w serwerze zastosowano następującą politykę wobec przychodzących zgłoszeń :

- gdy oba stanowiska obsługi są zajęte, ale bufor jest pusty, zgłoszenie jest odrzucane z prawdopodobieństwem 1/5,
- gdy w buforze jest już jedno miejsce zajęte, zgłoszenie przychodzące jest odrzucane z prawdopodobieństwem ¼,
- gdy zajęte są dwa miejsca w buforze, odrzucanych jest 1/3 przychodzących zgłoszeń,
- gdy w buforze czekają już 3 zgłoszenia – odrzucanych jest ½ zgłoszeń nadchodzących,
- gdy w buforze czekają cztery zgłoszenia – żadne następne nie są przyjmowane.

Rozwiązania :

λ_{gr} nie istnieje, system jest zawsze stabilny – jest to system z ograniczonym buforem – w systemie nigdy nie ma więcej niż 6 zgłoszeń.

$\Pi_0 = \frac{1}{9},\ \Pi_1 = \frac{2}{9},\ \Pi_2 = \frac{2}{9},\ \Pi_3 = \frac{8}{45},\ \Pi_4 = \frac{2}{15},\ \Pi_5 = \frac{4}{45},\ \Pi_6 = \frac{2}{45}$,

$P_B = \frac{2}{9}$,

$\lambda_+ = \mu_+ = 15\frac{5}{9}$ zgłoszeń na sekundę,

L = $2\frac{4}{9}$, W = $\frac{11}{70}$ sekundy, N = $1\frac{5}{9}$, $P_{idle} = \frac{1}{9} \cdot 100\,\% \approx 11\,\%$.

↓

6. Pewna nietypowa sieć sensorowa składa się z sześciu czujników zbierających dane meteorologiczne i sześciu węzłów odbiorczych, do których czujniki wysyłają zebrane informacje. Każdy czujnik zbiera dane średnio przez 15 sekund, po czym łączy się z jednym z wolnych węzłów odbiorczych i wysyła informacje, co trwa średnio 3 sekundy (transmisja point-to-point). Proszę policzyć prawdopodobieństwo, że jednocześnie prowadzonych jest *n* transmisji radiowych. Jak bardzo musiałaby wzrosnąć częstotliwość łączenia się czujników z węzłami odbiorczymi, aby cały ten system był niestabilny ?
Proszę założyć, że czasy zbierania danych i czasy transferu informacji do węzłów odbiorczych dane są rozkładami wykładniczymi.

Odpowiedzi : $$\Pi_n = \frac{\binom{6}{n}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^i} = \frac{\binom{6}{n}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\left(\frac{1}{5}+1\right)^6} = 0.335\cdot\binom{6}{n}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Niestabilność systemu nie jest możliwa.

7. Do serwera o trzech stanowiskach obsługi przychodzi średnio 20 zgłoszeń na sekundę. Każde ze stanowisk obsługuje pojedyncze zgłoszenie średnio w 50 ms. Bufor kolejkujący zgłoszenia jest na tyle duży, że można założyć jego nieskończoną pojemność. Zgłoszenia przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona, a czasy obsługi podlegają rozkładowi wykładniczemu.
Proszę narysować graf przejść opisujący ten system oraz obliczyć prawdopodobieństwa wszystkich jego stanów. Proszę również policzyć średni czas przebywania w serwerze pojedynczego zgłoszenia.

$\Pi_0 = \frac{4}{11}$, $\Pi_1 = \frac{4}{11}$, dla n > 1: $\Pi_n = \frac{2}{11}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$, $W = \frac{23}{440}$ sekundy.

↓

8. Który serwer będzie efektywniej obsługiwał zgłoszenia ?

a. z dwoma stanowiskami o intensywności obsługi μ,

b. czy z pojedynczym stanowiskiem obsługi o intensywności obsługi 2μ ?

W obu przypadkach należy założyć istnienie bufora o nieskończonej pojemności.

Aby dokonać wyboru, proszę porównać maksymalne intensywności zgłoszeń, które mogą zostać obsłużone w obu systemach oraz średni czas przebywania zgłoszenia w systemie. Należy przyjąć, że zgłoszenia przychodzą zgodnie z rozkładem Poissona, a czasy obsługi podlegają rozkładowi wykładniczemu.

Rozwiązanie :

Maksymalne intensywności zgłoszeń (λ_{gr}) w obu przypadkach są takie same i wynoszą 2μ. Średni czas przebywania zgłoszenia w systemie jest krótszy w drugim przypadku – stosunek długości tych czasów wynosi :

$$\frac{W_a}{W_b} = \frac{4}{2 + \frac{\lambda}{\mu}} .$$

Dla małych intensywności zgłoszeń, średni czas przebywania zgłoszenia w systemie jest prawie 2 razy krótszy w drugim przypadku. Gdy intensywność zgłoszeń jest bliska maksymalnej, oba systemy działają porównywalnie.